CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 1 h 30 - Coefficient : 3)

---==oOOo==---

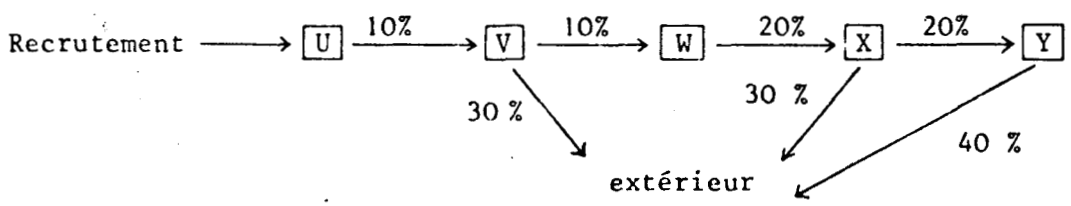
L'utilisation d'une calculatrice est recommandée

---==oOOo==---

Les 5 questions sont indépendantes à conditions d'admettre les résultats donnés dans l'énoncé.

Dans un pays imaginaire l'armée ne comporte que 5 grades notés U, V, W, X, Y. On appelle u_n, v_n, w_n, x_n, y_n les effectifs respectifs de ces 5 grades au début de l'année n : soit Z_n l'élément de $\mathbb{R}^5$ égal à $(u_n, v_n, w_n, x_n, y_n)$.

On suppose que l'évolution des effectifs de chaque grade en fonction des départs vers l'extérieur, du recrutement et de la promotion interne se fait selon le schéma suivant :



On cherche à prévoir l'évolution à long terme de cette population.

On négligera le fait que les divers effectifs devraient être des nombres entiers et on admettra sans justification ni vérification que la relation suivante est vérifiée quelque soit l'entier n :

$$Z_{n+1} = A.Z_n$$

où A est la matrice :

$$A : \begin{bmatrix} 0,9 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

1°) Calculer le polynôme caractéristique de A, noté P_A. On pourra effectuer la somme de chaque colonne. Les candidats devront indiquer clairement comment ils organisent leur calcul et laisser apparaître quelques résultats intermédiaires.

On vérifiera que $P_A(x) = (x - 1).Q(x)$

avec $Q(x) = x^4 - 2,4x^3 + 2,14x^2 - 0,839x + 0,1222$

2°) On cherche quatre réels a, b, p, q tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = (x^2 + ax + b)^2 - (px + q)^2$$

Montrer que b est racine d'un polynôme R du troisième degré dont on calculera les coefficients mais dont on ne cherchera pas à calculer les racines.

3°) a) Sachant que les 3 racines de R ont pour valeurs approchées :

$x_o = 0,340326$

$x_1 = 0,349571$

$x_2 = 0,380103$

Déterminer a, b, p, q et en déduire les valeurs propres de A.

b) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D (à coefficients complexes). Montrer que les coefficients de la matrice D^n (où D^n désigne le produit de n matrices égales à D) admettent chacun une limite lorsque n tend vers l'infini.
Que peut-on en déduire pour les coefficients de A^n ?

4°) Soit k' un réel et H l'hyperplan de $\mathbb{R}^5$ d'équation $u + v + w + x + y = k'$; montrer que H est stable par A.

5°) On rappelle que l'application $\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \longmapsto \sum_{i=1}^{5} |r_i|$$

munit $\mathbb{R}^5$ d'une structure d'espace vectoriel normé.
Soit Z_o l'élément de $\mathbb{R}^5$ égal à (10000, 1200, 90, 18, 2).
On admet que la suite d'éléments de $\mathbb{R}^5$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par son premier terme Z_o et la relation $Z_{n+1} = A.Z_n$
est convergente vers une limite L et que L vérifie A.L = L.

a) Déterminer explicitement L.

b) Comment la valeur de L dépend-elle de Z_o ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail